151. Bauer ノ定理ニ関スル二三ノ反例ニツイテ

（東北大）淡中忠郎．増田勝彦（1949.4.11）

筆者ノ内ノ一人（増田）ガ Bauer ノ定理ヲ拡張シヨウト試ミタガ，大抵ノ場合不成立ニナルノデソレニツイテ述ベテ見ル。

k ヲ有限次代数々体，K/k ヲソノ有限拡大体トスルトキ $\mathfrak{P}(K/k)$，$\mathfrak{P}'(K/k)$ トハ夫々 K デ完全ニ分解スル k ノ素いである，及び少クモ一ツ相対次数 1 ノ因子ヲモツ k ノ素いであるノ集合トスル。 K^* ヲ K ヲ含ム最小ノがろあ体トスル時．

$$\text{Bauer ノ定理：}\quad \mathfrak{P}(K/k) \supset \mathfrak{P}'(\Omega/k) \rightleftarrows \Omega \supset K^*$$

（但シ左辺ハ Kronecker 式密度 0 ナル $\mathfrak{f}$ ヲ除外シテヨイ）

今 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(K/k)$ ナラバ $k_{\mathfrak{p}}$ ヲ含ム K ノ完備体ハ $k_{\mathfrak{p}}$ ニ一致スル。
従ッテ $K k_{\mathfrak{p}} = k_{\mathfrak{p}}$　同様ニ K/k ノ共軛体 $K^{(i)}$ ニ対シテモ
$K^{(i)} k_{\mathfrak{p}} = k_{\mathfrak{p}}$ デアルカラ $K^{*} k_{\mathfrak{p}} = k_{\mathfrak{p}}$　即チ $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(K^{*}/k)$.
従ッテ $\mathfrak{P}(K/k) = \mathfrak{P}(K^{*}\cdot k)$ トナル。

定理 1.　$\mathfrak{N}(K/k) \supset \mathfrak{N}(\Omega/k) \nrightarrow \Omega^{*} \supset K^{*}$

定理 2.　$\Omega^{*} \supset K^{*} \nrightarrow \mathfrak{N}(K/k) \supset \mathfrak{N}(\Omega/k)$

<u>定理 1. ノ証明.</u>　$\mathfrak{N}(K/k) \supset \mathfrak{N}(\Omega/k) \longrightarrow \Omega^{*} \supset K^{*}$ ヲ群論ノ言葉ニ直シテ見ル。Ω, K 両方ヲ含ム Galois 体 P デ、Ω, K ガ部分群 F, H ニ属スルモノトスル。P/k ノ Galois 群 G ノ任意ノ巡回部分群 $\{\sigma\}$ ヲ分解群ニ持ツ様ナ P ノ素イデアルハ無限ニ存在スル。例ヘバ $\{\sigma\}$ ニ対応スル体 K_{σ} ノ絶対一次デ且ツ P デモ素イデアル ヲ採レバヨイ。問題ノ論理式ノ左辺ハ

$$\sigma \in F \rightarrow \exists \tau_{\sigma} \in G; \quad \tau_{\sigma}^{-1} \sigma \tau_{\sigma} \in H$$

右辺ハ勿論 $F^{*} \subset H^{*}$ トナル。コヽニ F^{*}, H^{*} ハ F, H ノ共軛群ノ共通部分ヲ示ス。

反例トシテハ

G :　4次ノ交代群

F :　$\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

H :　$\{1, (12)(34)\}$

ヲ考ヘレバヨイ。

$$(123)^{-1}(13)(24)(123) = (12)(34)$$
$$(132)^{-1}(14)(23)(132) = (12)(34)$$

デアルカラ論理式ノ左辺ガ満足サレルガ

$$F^{*} = F \qquad H^{*} = \{1\}$$

デアルカラ $F^{*} \subset H^{*}$ ハ成立シナイ。

<u>定理2. ノ証明.</u>　三次ノ対称群 G ノ部分群 $F = \{1, (12)\}$,
$H = \{1, (123), (132)\}$ ニ属スル体ヲ Ω, K トスレバヨイ。

$F^{*} = \{1\}$　　$H^{*} = H$ デアルカラ $\Omega^{*} \supsetneq K^{*} = K$.

然シ (12) ノ共軛元ハ H ニハナラナイ.

定理 3.　k ノアル法 $\mathfrak{m}$ ノ $S_{\mathfrak{m}}$ ニ対シテ $S_{\mathfrak{m}}$ ノスベテノ $\mathfrak{z}$ ガ $\mathfrak{P}(K/k)$ ニ属シテモ K/k ハ必ズシモ類体ニハナラナイ.

証明.　定理1ノ例ノ Ω ノ k ニ対スル Führer ヲ $\mathfrak{f}$ トスレバ、$S_{\mathfrak{f}}$ 内ノ $\mathfrak{z}$ ハ Ω デ完全ニ分解スル. 従ッテ作リ方カラ何レカ一方ノ因数ガ K デ完全ニ分解スルコトカラ $\mathfrak{z} \in S_{\mathfrak{f}}$　然ルニ K/k ハ Galois 体ニモナッテ居ラナイ.　(終)

$S_{\mathfrak{m}}$ 内ノ $\mathfrak{z}$ ガ $\mathfrak{P}(K/k)$ ニハイル場合ニハ K/k ガ類体ニナルコトハ Bauer ノ定理カラ分ル.

定理 4.　$\mathfrak{P}(K/k)$ ガ密度 0 ヲ除クスベテノ $\mathfrak{z}$ ヲ含メバ $K = k$.

K ヲ Galois 体 P/k ノ部分体デアルトスレバ 定理ハ任意ノ $\sigma \in G$ ニ対シ $\tau_{\sigma}^{-1} \sigma \tau_{\sigma} \in H$ ノ様ナ τ_{σ} ガ存在スレバ $G = H$ ナルコトニ帰着スル.

コノ群論的ナ定理ガ Waerden : Moderne Algebra I ニアルコトヲ岩澤氏カラ教ヘテ戴イタ.

ソノ他 k 内ニ 1 ノ n 巾根ガ全部含マレル時, 殆ンドスベテノ $\mathfrak{z}$ 進体デ $\omega \in k$ ガ n 乗数ナラバ, ω ハ k 内デ n 乗数ニナルコトハヨク知ラレテヰルガ, k 内ニ 1 ノ n 巾根ガ含マレヌ時ハ成立シナイ. 最近 Wang ガ Greenwald ノ例ノ定理ノ反例トシテ与ヘタモノガ丁度ソウナッテヰル. ソノ例デハ $2^{4} = 16$　2 進体 R_{2} ヲ除ケバ常ニ 8 乗数トナッテヰル.　以上.